UNIVERSITÀ DI PISA
FACOLTÀ DI ECONOMIA

Breviario di MICROECONOMIA

Principali definizioni e formule di teoria del consumo

ATTENZIONE
VERSIONE PRELIMINARE E INCOMPLETA

Curato da:

Jacopo STACCIOLI

Anno Accademico 2013–2014

ultima modifica: 2 settembre 2013

Indice

1 Concetti chiave

In questa prima sezione sono elencati alcuni concetti di base della teoria del consumo, utili come ripasso e funzionali allo sviluppo della teoria susseguente.

1.1 Insieme delle alternative di consumo

Dato un numero arbitrario di beni $L \geq 1$, l'insieme delle alternative di consumo C (da non confondere con il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$) è l'insieme di tutti i vettori (*panieri*) $c = (c_1, c_2, \dots, c_\ell, \dots, c_L)$ che possano materialmente essere consumati, dove ogni componente c_ℓ rappresenta la quantità dell'ℓ-esimo bene presente nel paniere.

Non negatività

Possiamo ragionevolmente imporre l'ipotesi di *non negatività* delle quantità consumate, cosicché debba valere $0 \leq c_\ell < \infty, \forall \ell = 1, \dots, L$. Questo implica che l'insieme di consumo sia un sottoinsieme (sotto determinate assunzioni, un *sottospazio*) dello spazio vettoriale reale di dimensione L: $C \subseteq \mathbb{R}^L_+$; nel caso $L = 2$, che sarà spesso affrontato nel prosieguo, si ha $C \subseteq \mathbb{R}^2_+$.

Additività

Dati due panieri di consumo possibili, il paniere che contenga la somma delle quantità presenti nei due panieri per ciascun bene deve a sua volta essere un paniere di consumo possibile. Si ricordi che i panieri altro non sono che vettori nello spazio $\mathbb{R}^L$.

$$a, b \in C, \quad c = a + b \qquad \longrightarrow \qquad c \in C \tag{1.1}$$

dove $+$ rappresenta l'operatore di somma tra vettori, per cui $c_\ell = a_\ell + b_\ell, \forall \ell = 1, \dots, L$.

Perfetta divisibilità

Dato un paniere di consumo possibile $a \in C$, qualsiasi altro paniere b che contenga una frazione $\lambda \in [0, 1]$ delle quantità di ciascun bene di a è un paniere di consumo possibile.

$$a \in C, \quad b = \lambda \cdot a \qquad \longrightarrow \qquad b \in C \tag{1.2}$$

dove $\cdot$ rappresenta l'operatore di prodotto di un vettore per uno scalare, per cui $b_\ell = \lambda \cdot a_\ell, \forall \ell = 1, \dots, L$.

Convessità

L'ipotesi di *convessità* riunisce le precedenti ipotesi di *additività* e *perfetta divisibilità* ed afferma che qualunque combinazione convessa c di due panieri possibili a, b sia una possibilità di consumo.

$$a, b \in C, \quad c = \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad \longrightarrow \qquad c \in C \tag{1.3}$$

1.2 Vincolo di bilancio

Dati due beni x e y, con relativi prezzi p_x e p_y, il vincolo di bilancio rappresenta l'insieme delle possibilità di consumo per un consumatore che detenga un reddito monetario pari a M.

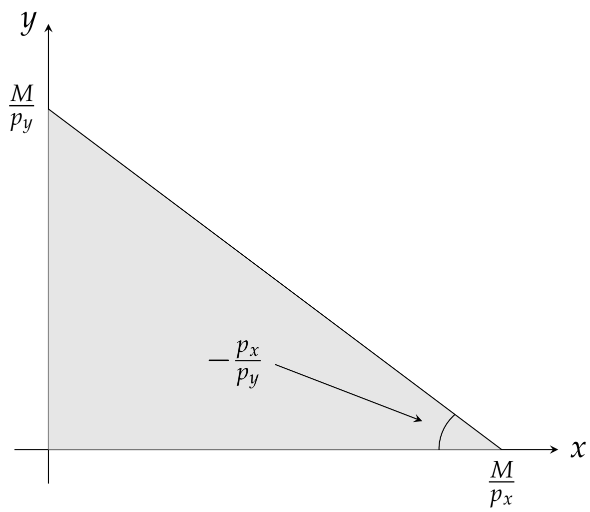
$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M \tag{1.4}$$

dove $p_x \cdot x$ rappresenta la spesa (prezzo x quantità) per il consumo del bene x e $p_y \cdot y$ è la spesa per il consumo del bene y. La somma delle due spese non può superare il reddito detenuto M.

Per rappresentare graficamente il vincolo di bilancio, bisogna innanzitutto trovare la frontiera che lo delimita, cioè si pone la stretta uguaglianza nella (1.4) e si risolve per y:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = M \longrightarrow y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x \tag{1.5}$$

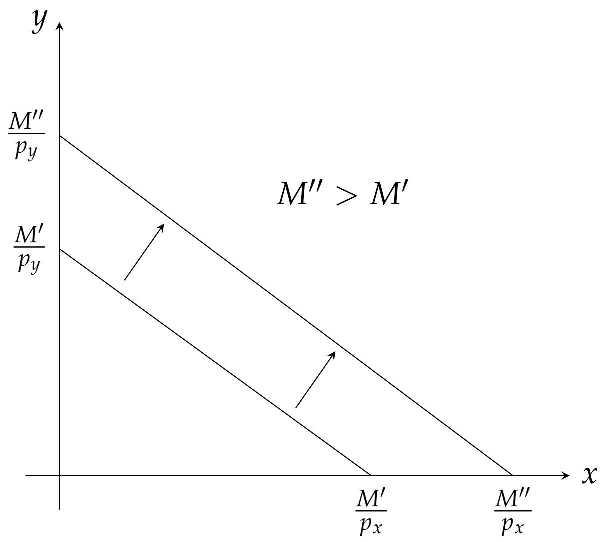
Quest'ultima è una retta con inclinazione $-\frac{p_x}{p_y}$ e intercetta verticale $\frac{M}{p_y}$ nel piano cartesiano x, y.



Il vincolo di bilancio è costituito dall'area compresa tra la retta di bilancio e gli assi cartesiani, come evidenziato in figura.

Variazione nel reddito

Una variazione del reddito monetario M fa traslare la retta di bilancio verso l'origine (nel caso di una diminuzione) o verso l'esterno (nel caso di un aumento). Graficamente:



Nel caso in cui il reddito rimanga invariato $\overline{M}$ e che entrambi i prezzi dei beni varino nella stessa proporzione $\lambda \neq 1$ si ottiene:

$$\lambda \cdot p_x \cdot x + \lambda \cdot p_y \cdot y = M \tag{1.6}$$

Raccogliendo il coefficiente λ e portandolo nel lato destro dell'equazione si ottiene:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = \frac{M}{\lambda} \tag{1.7}$$

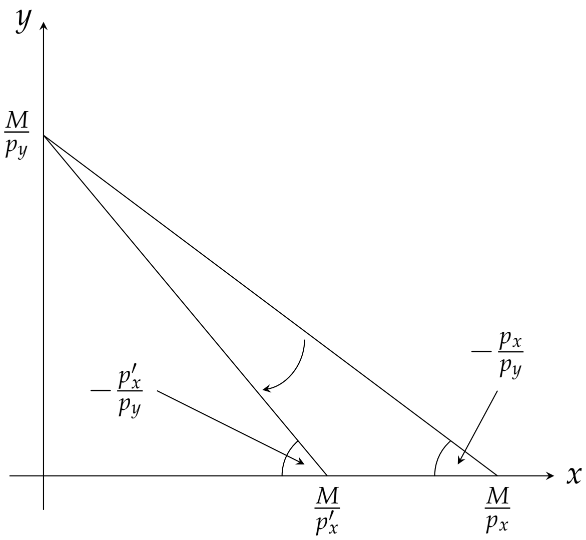
Le due equazioni equivalenti (1.6) e (1.7) ci dicono che se tutti i prezzi variano nella stessa proporzione, il nuovo vincolo coincide con quello che si avrebbe tenendo i prezzi costanti e dividendo il reddito M per la stessa costante λ.
Una conseguenza di questo è che se vengono moltiplicati il reddito ed entrambi i prezzi dei beni per una stessa costante, il vincolo di bilancio non ne risente:

$$\lambda \cdot p_x \cdot x + \lambda \cdot p_y \cdot y = \lambda \cdot M \longrightarrow p_x \cdot x + p_y \cdot y = M \tag{1.8}$$

Questa proprietà viene riassunta nell'espressione *assenza di illusione monetaria* (analogamente, la funzione è *omogenea di grado zero*).

Variazione nei prezzi

La variazione di uno dei prezzi dei beni (supponiamo quello del bene x) modifica, invece, il rapporto tra i prezzi $\frac{p_x}{p_y}$ e dunque la pendenza (coefficiente angolare) del vincolo di bilancio, che ruoterà attorno all'intercetta del bene il cui prezzo rimane costante (in questo caso il bene y e dunque l'intercetta verticale) rispettivamente verso l'origine, qualora il prezzo (p_x) aumenti, o verso l'esterno, qualora diminuisca. Graficamente:



Nel caso in cui varino entrambi i prezzi dei beni, p_x, p_y e il reddito rimane costante $\overline{M}$, si può ricavare la nuova retta di bilancio semplicemente congiungendo le due nuove intercette osservate ai nuovi prezzi, rispettivamente quella verticale $\frac{M}{p'_y}$ e quella orizzontale $\frac{M}{p'_x}$.

2 Preferenze

Si supponga di domandare ad un potenziale consumatore come ordinerebbe tra loro 2 possibilità di consumo $a, b \in C$, sulla base delle proprie preferenze. Si distinguono 3 tipi di relazione:

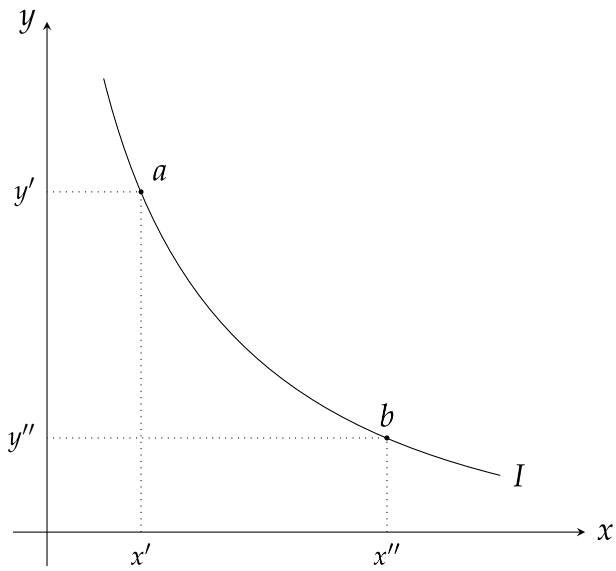
1. $a \succsim b$: a è almeno buono quanto b
2. $a \succ b$: a è strettamente preferito a b
3. $a \sim b$: a è indifferente a b

Si noti che:

se $a \succsim b$ e contemporaneamente $b \succsim a$ allora $a \sim b$

se $a \succsim b$ e contemporaneamente $b \not\succsim a$ allora $a \succ b$

Le preferenze di un consumatore possono essere rappresentate graficamente mediante *curve di indifferenza*: una curva di indifferenza I è il luogo di tutti i panieri appartenenti allo spazio delle possibilità di consumo per cui vale la relazione di indifferenza: $\forall a, b \in I, a \sim b$ Graficamente una curva di indifferenza si può rappresentare come segue:



N.B. Non tutte le curve di indifferenza si rappresentano graficamente allo stesso modo; il caso qui riportato è un caso particolare di preferenze che, come vedremo presto, sono piuttosto *regolari*.
Dal grafico si evince che i due panieri a, b sono indifferenti tra loro, $a \sim b$, sebbene siano composti molto diversamente: in particolare il paniere b ha una quantità molto maggiore del bene x rispetto al paniere a e quest'ultimo ha una quantità molto maggiore del bene y rispetto al paniere b.

2.1 Ipotesi sulle preferenze

Completezza

Date due possibilità di consumo a, b deve necessariamente valere una delle relazioni $a \succsim b$ o $b \succsim a$, oppure entrambe.

Riflessività

Data una possibilità di consumo a, essa deve necessariamente essere almeno buona quanto se stessa: $a \succsim a$.

Transitività

Date 3 possibilità di consumo a, b, c, se vale la relazione $a \succsim b \succsim c$, allora deve necessariamente valere $a \succsim c$.
Ne deriva anche che:

1. se $a \succ b \succ c$ allora $a \succ c$

2. se $a \sim b \sim c$ allora $a \sim c$

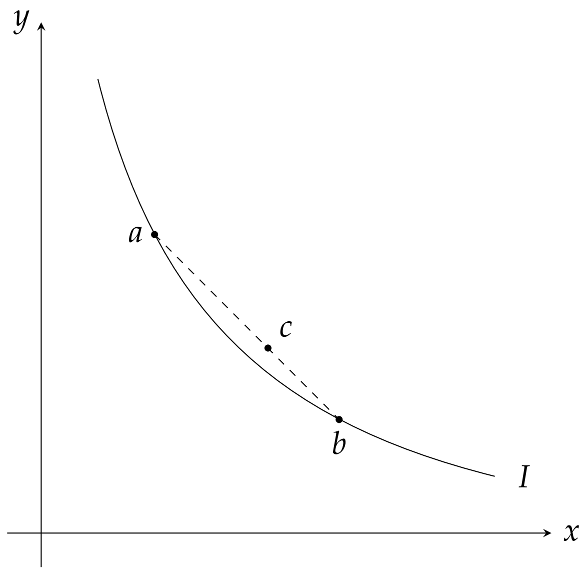
Si noti come una diretta conseguenza dell'ipotesi di transitività sia l'impossibilità che due diverse curve di indifferenza si intersechino tra loro.

Convessità

Si considerino due possibilità di consumo a, b tra loro indifferenti, cioè tali che $a \sim b$, e un'altra possibilità di consumo c che sia una combinazione dei primi due, del tipo $c = \lambda a + (1 - \lambda)b, 0 < \lambda < 1$:

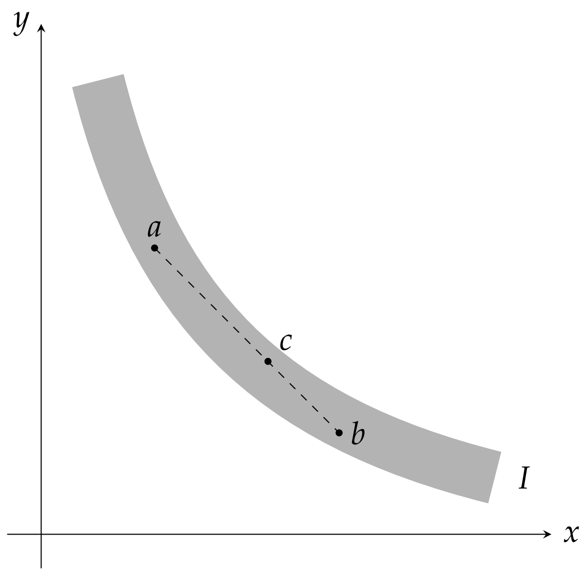
- se $c \succsim a \sim b$ le preferenze si dicono *convesse*;
- se $c \succ a \sim b$ le preferenze si dicono *strettamente convesse*.

Graficamente, un esempio di preferenze strettamente convesse:



Conseguenza dell'ipotesi di (stretta) convessità

L'ipotesi di stretta convessità non è compatibile con curve di indifferenza che siano "spesse", in quanto, date $a, b \in I$ due possibilità di consumo appartenenti alla stessa curva d'indifferenza, $\exists \lambda \in [0, 1] \mid c = \lambda a + (1 - \lambda)b \in I$, così che $c \sim a \sim b$, contraddicendo l'ipotesi di stretta convessità che implica $c \succ a \sim b$. Graficamente:



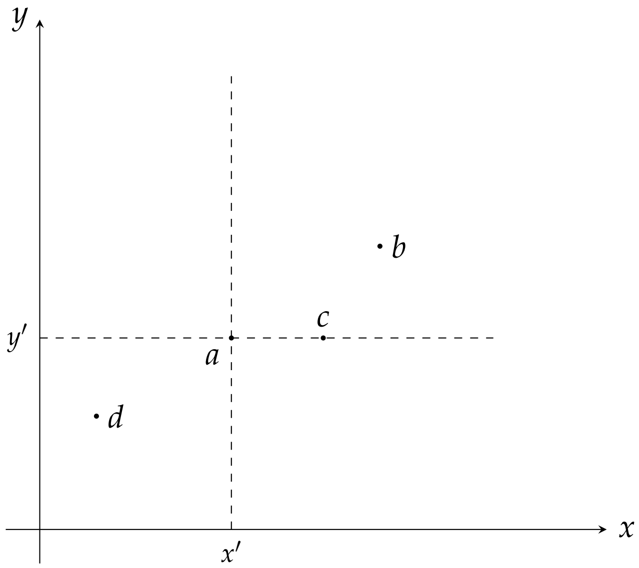
Monotonicità

L'ipotesi di *monotonicità* afferma che se una possibilità di consumo b contiene, di tutti i beni che la compongono, quantità non minori, di cui almeno una maggiore, rispetto al paniere a, allora $b \succsim a$.

$$\text{se } \; b_\ell \geq a_\ell, \forall \ell = 1, \ldots, L \;\; \text{e} \;\; \exists \ell' \;\; \text{tale che} \;\; b_{\ell'} \geq a_{\ell'} \;\; \longrightarrow \;\; b \succsim a \tag{2.1}$$

Più restrittiva, l'ipotesi di *stretta monotonicità* afferma che se una possibilità di consumo b contiene, di tutti i beni che la compongono, quantità non minori, di cui almeno una maggiore, rispetto al paniere a, allora $b \succ a$.

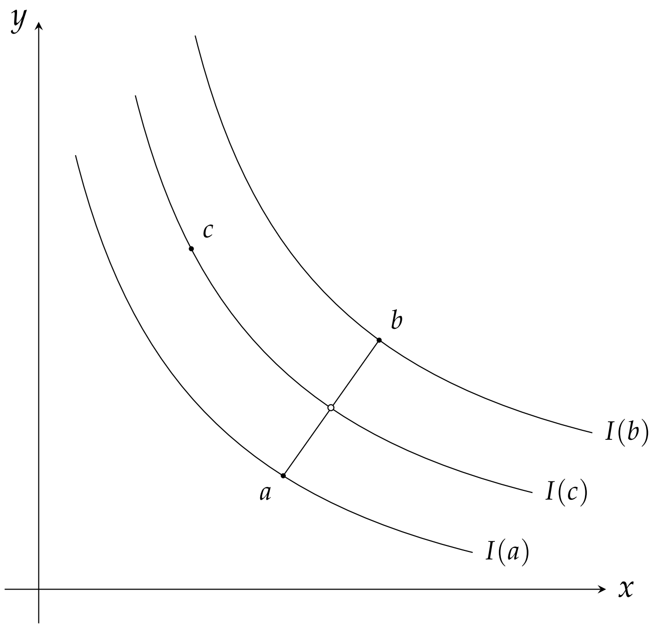
$$\text{se } \; b_\ell \geq a_\ell, \forall \ell = 1, \ldots, L \;\; \text{e} \;\; \exists \ell' \;\; \text{tale che} \;\; b_{\ell'} \geq a_{\ell'} \;\; \longrightarrow \;\; b \succ a \tag{2.2}$$



Si noti che sotto l'ipotesi di (semplice) monotonicità, il paniere c, che rispetto ad a ha una quantità maggiore di un bene, e uguale dell'altro, può essere a quest'ultimo indifferente: $c \sim a$.
Sotto entrambe le ipotesi si ha che $b \succ a \succ d$, in quanto quest'ultimo contiene quantità strettamente minori di tutti i beni rispetto al primo.

Continuità

Siano dati tre panieri a, b, c tali che $b \succ c \succ a$; ognuno di questi panieri dovrà appartenere a una differente curva di indifferenza. L'ipotesi di *continuità* afferma che se uniamo con un segmento nello spazio delle possibilità di consumo i panieri a e b, rispettivamente il peggiore e il migliore, questo segmento dovrà necessariamente intersecare la curva di indifferenza passante per il paniere intermedio c. Detta in altri termini, questa ipotesi assicura che passando da panieri peggiori a panieri migliori si incontrino sempre panieri che siano intermedi, senza che si presentino dei salti nelle preferenze.



2.2 Funzione di utilità

La funzione di utilità è una funzione $U(c) : C \to \mathbb{R}$ che associa un numero reale ad ogni paniere di beni (x, y) appartenente all'insieme di consumo C, tale che:

$$U(a) = U(b) \iff a \sim b \tag{2.3}$$

$$U(a) > U(b) \iff a \succ b \tag{2.4}$$

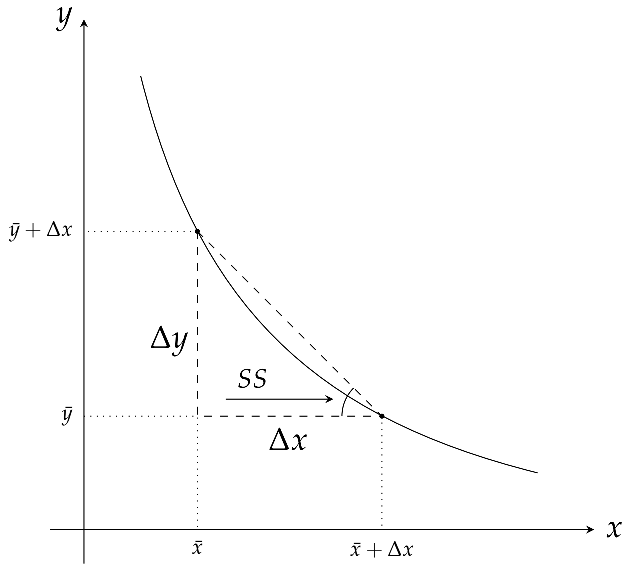
Una funzione di questo tipo è *ordinale* e non *cardinale*: facendo un esempio, il fatto che per un consumatore il confronto tra due diversi panieri $a \neq b$ dia luogo alla relazione $U(a) = 2U(b)$ significa solamente che per quel consumatore valga la relazione $a \succ b$ e non che ottenga necessariamente una soddisfazione doppia dal consumo del paniere a rispetto al paniere b. La proprietà di ordinalità assicura che ogni trasformazione monotona crescente della funzione di utilità dia luogo ad una nuova funzione di utilità che rappresenti le medesime preferenze.
Le curve di indifferenza precedentemente nominate non sono altro che le curve di livello della funzione di utilità.

2.3 Saggio di sostituzione

Indica il saggio al quale il consumatore è disposto a sostituire tra loro i due beni in modo da rimanere indifferente alla situazione iniziale. Si supponga che il consumatore ceda una data quantità Δx del bene x. E' presumibile che necessiti di ricevere una quantità positiva Δy del bene y per sanare la perdita di utilità derivante dalla cessione del primo bene. Il saggio di sostituzione tra x e y misura esattamente l'ammontare del bene y a cui il consumatore sia disposto a rinunciare per ottenere in cambio un'unità aggiuntiva del bene x.

$$SS = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.5}$$

Poichè solitamente il segno delle due variazioni diverge (una cessione e una riscossione), il saggio di sostituzione avrà generalmente segno negativo: $SS < 0$. Il caso in cui $SS > 0$ esiste, ma viola l'ipotesi di monotonicità delle preferenze; le curve di indifferenza sarebbero crescenti, anzichè usualmente decrescenti.



2.4 Saggio marginale di sostituzione

Deriva dalla definizione di saggio di sostituzione, calcolato per variazioni infinitesimali:

$$SMS = \lim_{\Delta x \to 0} SS = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{U'_x}{U'_y} \tag{2.6}$$

Il saggio marginale di sostituzione rappresenta la pendenza in un determinato punto (x, y) della curva di indifferenza che vi passa.

3 Funzioni di domanda

3.1 Funzione di domanda Walrasiana

La funzione di domanda walrasiana è quella funzione che associa ad ogni vettore di prezzi dei beni e reddito il paniere di consumo che massimizza l'utilità del consumatore rispettando il vincolo di bilancio.

Il caso di 2 beni

Le domande ottime di x e di y sono funzioni di entrambi i prezzi dei beni e del reddito:

$$x^* = x(p_x, p_y, M) \qquad\qquad y^* = y(p_x, p_y, M) \tag{3.1}$$

Matematicamente si tratta dunque di risolvere un problema di *massimo vincolato*:

$$\max_{x,y} U(x, y) \;\; \text{s.v.} \;\; p_x \cdot x + p_y \cdot y = M \tag{3.2}$$

dove il vincolo di bilancio è espresso come stretta uguaglianza per l'ipotesi di monotonicità che assicura la totale spesa del reddito a disposizione del consumatore.
Risolvendo il vincolo per y (vedi eq. (1.5)) e internalizzandolo nella funzione di utilità (funzione obiettivo), si può risolvere un problema di semplice massimizzazione:

$$\max_x U(x, \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}) \tag{3.3}$$

Nel punto di massimo (interno) x^* la derivata prima della funzione di utilità $U(\cdot)$ rispetto a x deve essere nulla (condizione necessaria del primo ordine):

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x^*} = U'_x - U'_y \cdot \frac{p_x}{p_y} = 0 \tag{3.4}$$

dunque, riorganizzando i termini, nel punto di massimo deve valere

$$\frac{U'_x}{U'_y} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.5}$$

rifacendoci alla definizione di saggio marginale di sostituzione (eq. (2.6)) riscriviamo la condizione di ottimalità:

$$SMS = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.6}$$

Nel punto di ottimo il saggio marginale di sostituzione deve eguagliare il rapporto tra i prezzi dei beni.

Il caso di L beni

Nel caso in cui si voglia massimizzare l'utilità dato un numero arbitrario $L \geq 2$ di beni, il problema di massimizzazione vincolata può essere impostato come segue:

$$\max_{x_1,\ldots,x_L} U(x_1, \ldots, x_\ell, \ldots, x_L) \text{ s.v. } p_1 \cdot x_1 + \cdots + p_\ell \cdot x_\ell + \cdots + p_L \cdot x_L = M \tag{3.7}$$

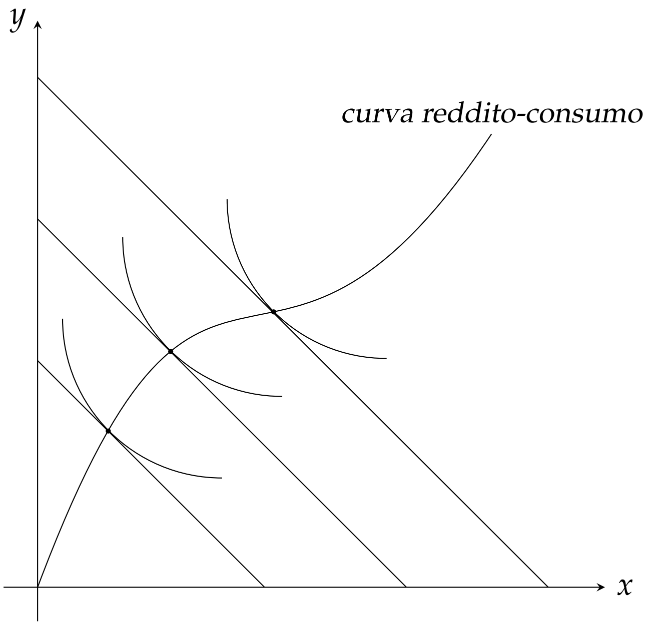
Si scrive la funzione *Lagrangiana* come:

$$\mathcal{L} = U(x_1, \ldots, x_\ell, \ldots, x_L) - \lambda[p_1 \cdot x_1 + \cdots + p_\ell \cdot x_\ell + \cdots + p_L \cdot x_L - M] \tag{3.8}$$

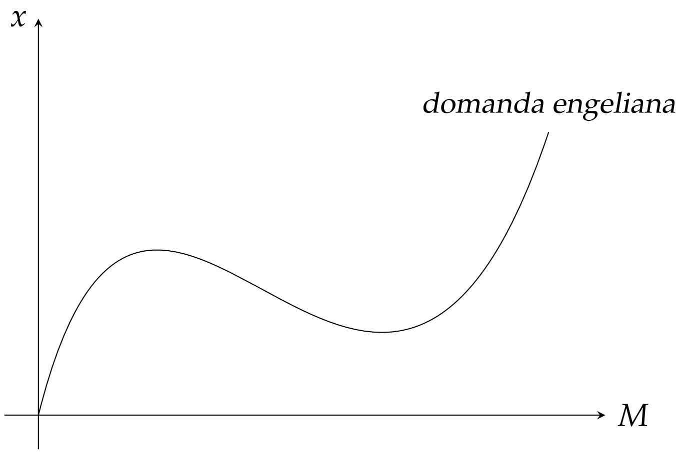
In un punto di ottimo x^* devono valere le condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_1} - \lambda \cdot p_1 = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\ell} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_\ell} - \lambda \cdot p_\ell = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_L} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_L} - \lambda \cdot p_L = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 \cdot x_1 + \cdots + p_\ell \cdot x_\ell + \cdots + p_L \cdot x_L - M = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

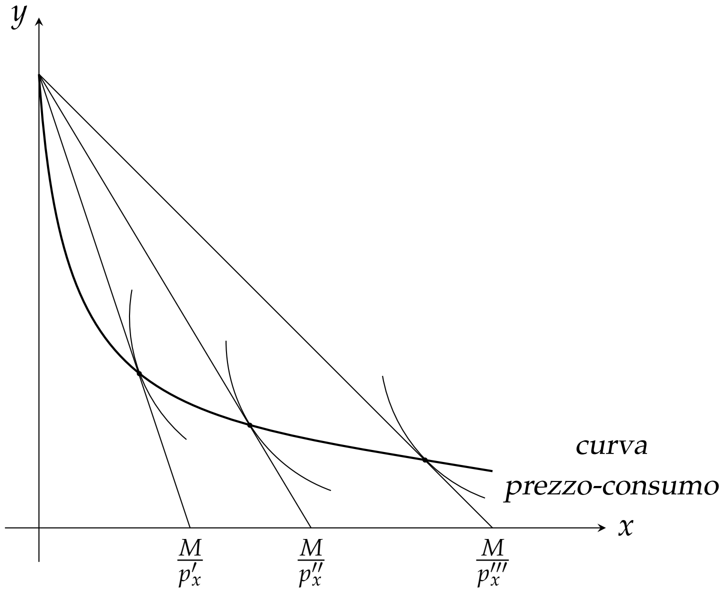
3.2 Curva reddito-consumo



3.3 Domanda Engeliana



3.4 Curva prezzo-consumo



3.5 Elasticità al reddito e ai prezzi

In economia il concetto di elasticità si riferisce generalmente al rapporto tra le variazioni percentuali di due variabili. Nel nostro caso siamo interessati ad analizzare in che misura una variazione nel reddito o nel prezzo di un bene influenza la domanda ottima del consumatore.

Elasticità al reddito

L'elasticità della domanda del bene x al reddito è definita come la variazione percentuale nella domanda ottima x^* indotta da una variazione percentuale nel reddito M. Formalmente:

$$\eta_{x,M} = \frac{\partial x^*}{\partial M} \cdot \frac{M}{x^*} \tag{3.10}$$

Possiamo ragionevolmente aspettarci che un consumatore, avendo a disposizione un reddito maggiore (minore), voglia consumare una quantità maggiore (minore) del bene x, e che dunque $\eta_{x,M} > 0$; nulla però vieta al consumatore di comportarsi in maniera opposta, domandando una quantità minore (maggiore) del bene x pur avendo a disposizione un reddito maggiore (minore); in questo caso sostituirà il consumo del bene x con il consumo del bene y (se nell'economia sono presenti solo questi due beni) per l'ipotesi di monotonicità delle preferenze, che portano il consumatore a spendere tutto il reddito che ha a disposizione nel consumo dei due beni. Si devono dunque distinguere due casi:

1. se $\eta_{x,M} > 0$ si dice che x sia un **bene normale**;

2. se $\eta_{x,M} < 0$ si dice che x sia un **bene inferiore**.

Nel caso in cui un bene sia normale possiamo ulteriormente distinguere due classi di beni:

1. se $0 < \eta_{x,M} < 1$ si dice che x sia un **bene necessario**;
2. se $\eta_{x,M} > 1$ si dice che x sia un **bene di lusso**;

Un bene è necessario (di lusso) se una data variazione nel reddito induce una variazione nella sua domanda meno che (più che) proporzionale. Trattandosi in entrambi i casi di un bene normale, il segno della variazione del reddito è concorde con quello della variazione della domanda.

Elasticità al prezzo

L'elasticità della domanda di un bene al prezzo può essere definita in termini del proprio prezzo (elasticità diretta) o, in un economia di $L = 2$ beni, in termini del prezzo dell'altro bene (elasticità incrociata).
Elasticità diretta: è definita come la variazione percentuale nella domanda ottima x^* indotta da una variazione percentuale del proprio prezzo p_x. Formalmente:

$$\eta_{x,p_x} = \frac{\partial x^*}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x^*} \tag{3.11}$$

Possiamo ragionevolmente aspettarci che un consumatore, a fronte di un aumento (diminuzione) del prezzo del bene x, voglia consumarne una quantità minore (maggiore), e che dunque $\eta_{x,p_x} < 0$; nulla però vieta al consumatore di comportarsi in maniera opposta, domandando una quantità maggiore (minore) del bene il cui prezzo sia aumentato (diminuito); in questo caso, se il reddito M rimane invariato, dovrà conseguentemente consumare una quantità minore (maggiore) del bene y. Si devono dunque distinguere due casi:

1. se $\eta_{x,p_x} < 0$ si dice che x sia un **bene ordinario**;
2. se $\eta_{x,p_x} > 0$ si dice che x sia un **bene di Giffen**.

Elasticità incrociata: è definita come la variazione percentuale nella domanda ottima x^* indotta da una variazione percentuale del prezzo dell'altro bene presente nell'economia, p_y. Formalmente:

$$\eta_{x,p_y} = \frac{\partial x^*}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x^*} \tag{3.12}$$

A seconda del segno di questa elasticità si distinguono due casi:

1. se $\eta_{x,p_y} > 0$ si dice che il bene y sia un **sostituto** del bene x;
2. se $\eta_{x,p_y} < 0$ si dice che il bene y sia un **complemento** del bene x.

4 Tipi di funzione di utilità

In questa sezione si analizzano le principali forme funzionali che descrivono l'utilità per il consumatore; per ognuna di esse si deriva la condizione di ottimalità e si tracciano le curve reddito-consumo, domanda engeliana, prezzo-consumo.

4.1 Cobb-Douglas

La funzione di utilità si presenta nella forma:

$$U(x,y) = \gamma \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0 \tag{4.1}$$

Senza alcuna perdita di generalità, prendiamo in considerazione il caso $\gamma = 1$. Nel caso particolare in cui gli esponenti sommino a 1, cioè $\alpha + \beta = 1$, questi rappresentano le quote di reddito M che il consumatore destinerà rispettivamente all'acquisto del bene x e del bene y. Nel caso in cui $\alpha + \beta \neq 1$ le quote di spesa saranno rispettivamente $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ per il bene x e $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ per il bene y.
Può risultare conveniente estrarre il logaritmo naturale della funzione di utilità in modo da rendere più agevole il calcolo delle derivate parziali.

$$V(x,y) = \log U(x,y) = \alpha \log x + \beta \log y \tag{4.2}$$

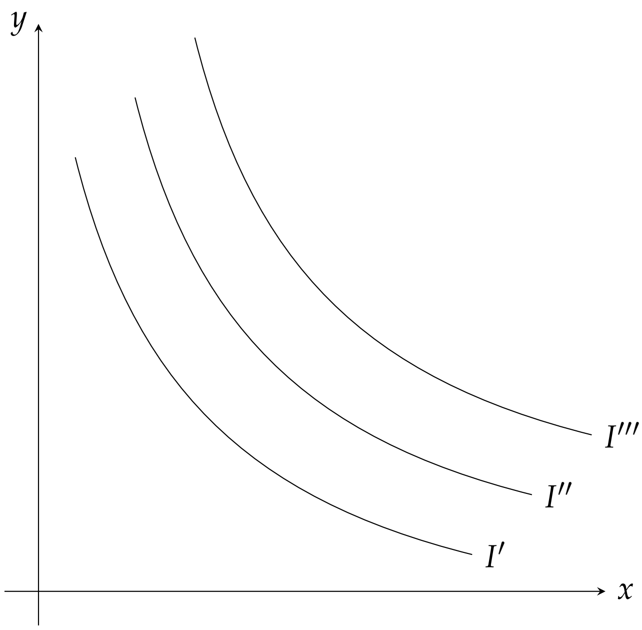
Si noti che, essendo il logaritmo una funzione monotona crescente, la sua applicazione non pregiudicherà il carattere ordinale delle preferenze.
Le due utilità marginali saranno:

$$V'(x) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \frac{\alpha}{x} \qquad V'(y) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \frac{\beta}{y} \tag{4.3}$$

Il saggio marginale di sostituzione è:

$$SMS = \frac{V'(x)}{V'(y)} = \frac{\alpha y}{\beta x} \tag{4.4}$$

Possiamo adesso rappresentare le preferenze del consumatore mediante le curve di indifferenza (curve di livello della funzione di utilità):

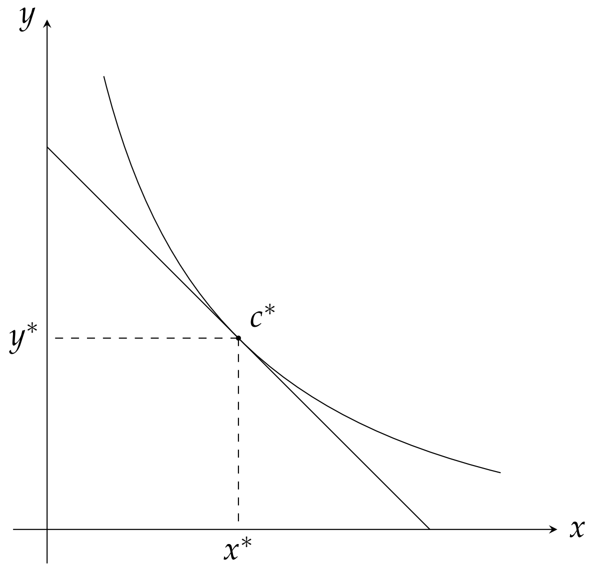


Ottimalità

La condizione di ottimalità si ottiene imponendo l'uguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione e il rapporto dei prezzi:

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{4.5}$$

Graficamente l'ottimalità, dove giace il paniere $c^* = (x^*, y^*)$, è rappresentata dalla tangenza tra la curva di indifferenza e la generica retta di bilancio:



La funzione di domanda dei due beni si ottiene sostituendo la condizione di ottimalità (4.5) nel vincolo di bilancio:
Per quanto riguarda il bene x si risolve la condizione (4.5) rispetto a $p_y \cdot y$

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y} \longrightarrow p_y \cdot y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot p_x \cdot x \tag{4.6}$$

Adesso sostituiamo nel vincolo di bilancio:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = M \longrightarrow p_x \cdot x + \frac{\beta}{\alpha} \cdot p_x \cdot x = M \tag{4.7}$$

dalla quale ricaviamo che la domanda ottima del bene x sarà pari a:

$$x^* = \frac{M}{p_x(1 + \frac{\beta}{\alpha})} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_x} \tag{4.8}$$

Possiamo ripetere il ragionamento per il bene y ottenendo:

$$y^* = \frac{M}{p_y(1 + \frac{\alpha}{\beta})} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{M}{p_y} \tag{4.9}$$

Naturalmente nel caso in cui gli esponenti siano tali che $\alpha + \beta = 1$, le due funzioni di domanda saranno

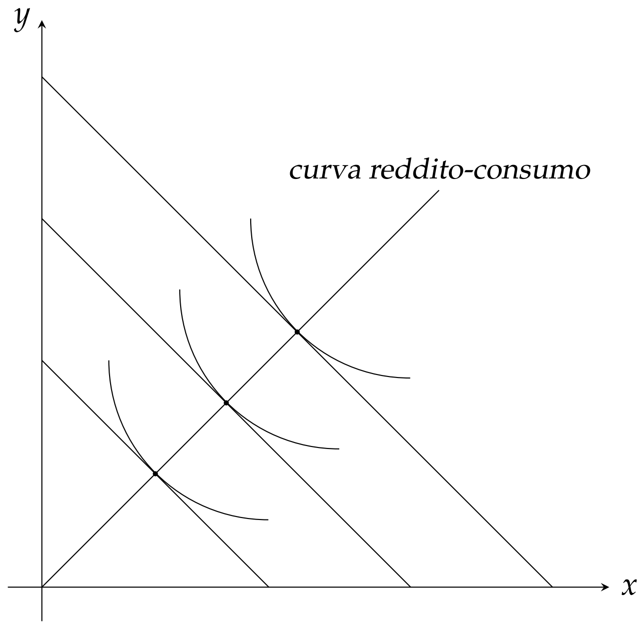
$$x^* = \frac{\alpha M}{p_x} \qquad y^* = \frac{\beta M}{p_y} \tag{4.10}$$

in cui, come precedentemente detto, α e β rappresentano le quote di reddito destinate al consumo del bene x e y rispettivamente.

Curva reddito-consumo

Si ottiene specificando la condizione di ottimalità (4.5) rispetto a y e disegnando la curva nel piano cartesiano x, y.

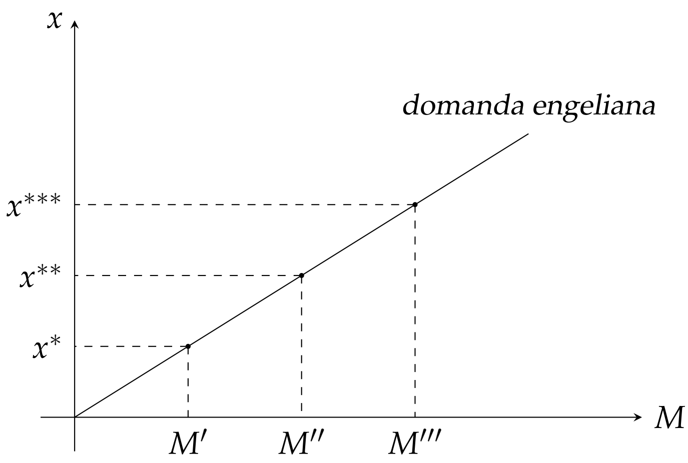
$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y} \longrightarrow y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_x \cdot x}{p_y} \tag{4.11}$$



Trattandosi di una funzione di utilità di tipo Cobb-Douglas, la curva reddito consumo è lineare e di fatto è una retta passante per l'origine, inclinata positivamente (inclinazione pari a $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y}$).

Domanda engeliana

La curva di domanda engeliana per il bene x si ottiene disegnando, in uno spazio cartesiano x, M, il luogo delle domande ottime del bene x per ogni livello di reddito M associato; si tratta in pratica di riportare nel nuovo spazio cartesiano il risultato della precedente curva reddito-consumo. Si noti la conservazione del carattere di linearità.



Curva prezzo-consumo

4.2 Beni perfetti sostituti

La funzione di utilità si presenta nella forma

$$U(x, y) = f(x + y) \tag{4.12}$$

dove $f(\cdot)$ è una funzione monotona crescente. Spesso si ha a che fare con un caso particolare, del tipo

$$U(x, y) = \alpha x + \beta y \tag{4.13}$$

Nel prosieguo sarà analizzato quest'ultimo.

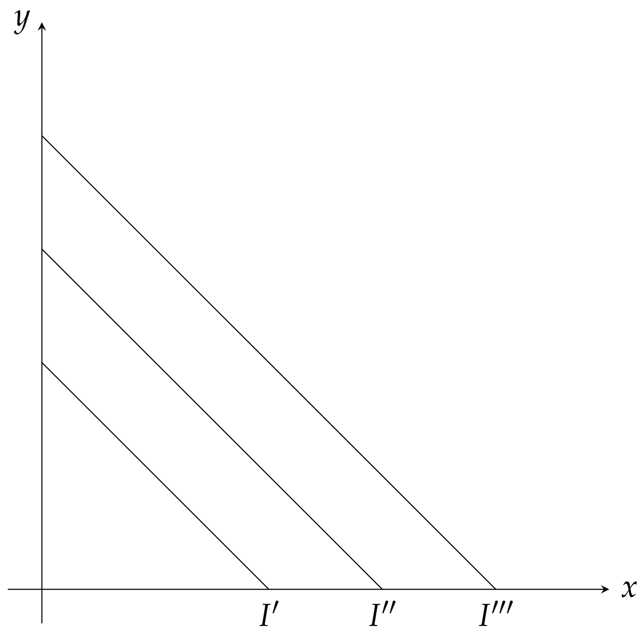
Derivando le utilità marginali

$$U'(x) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \alpha \qquad U'(y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \beta \tag{4.14}$$

ci accorgiamo che queste sono costanti. Ne deriva che il saggio marginale di sostituzione sia anch'esso costante:

$$SMS = -\frac{U'(x)}{U'(y)} = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{4.15}$$

Ne consegue che le curve di indifferenza siano di tipo lineare; l'ipotesi di stretta convessità non è dunque rispettata. Graficamente:



Ottimalità

Poichè sia le curve di indifferenza, sia il vincolo di bilancio hanno forma lineare, non può mai verificarsi una tangenza tra loro. Inoltre sia SMS che $\frac{p_x}{p_y}$ sono costanti.
Si distinguono due casi:

1. $SMS = \frac{p_x}{p_y}$
2. $SMS \neq \frac{p_x}{p_y}$

Primo caso

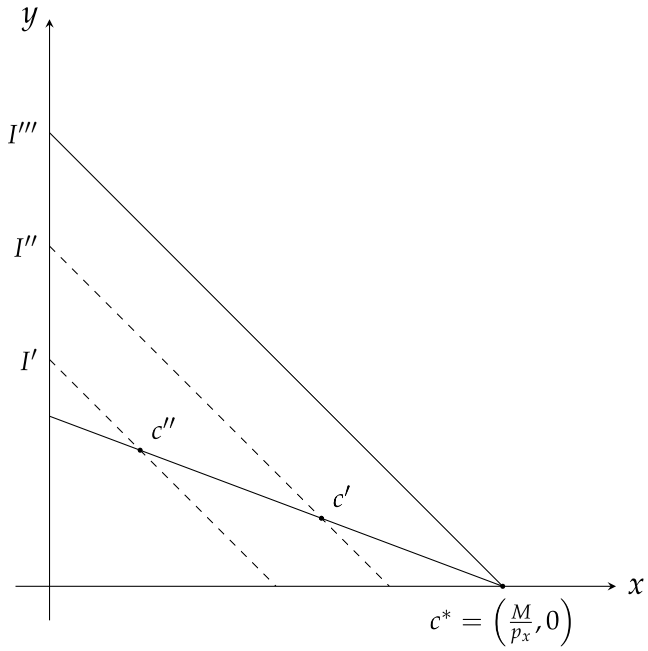
Il vincolo di bilancio e una delle curve di indifferenza sono due rette coincidenti, dunque hanno tutti i punti in comune. Ogni punto è ottimale dal punto di vista del consumatore e si ha un'infinità di soluzioni piuttosto che una soluzione univoca.

Secondo caso

In questo caso si avrà una soluzione d'angolo, in quanto il consumatore sarà sempre disposto a cedere al mercato un'unità di uno dei beni ricevendo in cambio una quantità dell'altro bene che più che compensa la perdita di utilità derivante dalla cessione del primo bene, portandolo ad un'utilità superiore.
Si distinguono due casi (si ricordi che, non trattandosi di soluzione interna, la condizione del primo ordine non deve essere soddisfatta):

1. $SMS < \frac{p_x}{p_y}$
2. $SMS > \frac{p_x}{p_y}$

Nel primo, il consumatore cede una quantità Δx del bene x ricevendo dal mercato una quantità Δy^* maggiore di quella che lo renderebbe alla fine indifferente. Ripetendo ricorsivamente questo scambio, il consumatore avrà rinunciato completamente all'acquisto del bene x in favore di una soluzione d'angolo in cui acquista solo il bene y.
Nel secondo, accade l'opposto, ovvero, il consumatore rinuncierà all'acquisto del bene y in favore di una soluzione che prevede l'acquisto del solo bene x, sfruttando la divergenza tra il saggio a cui sostituirebbe lui un bene con l'altro (SMS), e il saggio a cui il mercato sostituisce i due beni ($\frac{p_x}{p_y}$). Questo secondo caso è rappresentato graficamente:



I punti c' e c'' sono dei panieri che il consumatore si può permettere di acquistare (appartengono al vincolo di bilancio), ma sono sub-ottimali in quanto esiste un altro punto appartenente al vincolo di bilancio in cui quest'ultimo interseca una curva di indifferenza alla quale è associato un livello di utilità maggiore.

Curva reddito-consumo

Domanda engeliana

Curva prezzo-consumo

4.3 Beni perfetti complementi

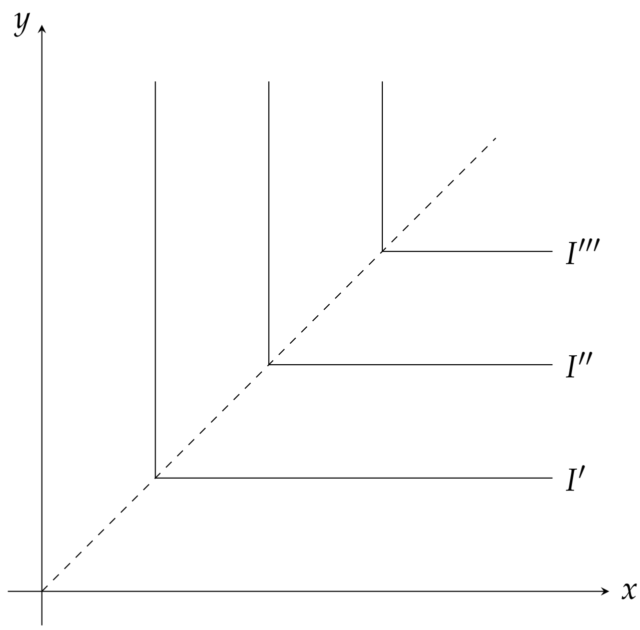
La funzione di utilità si presenta nella forma

$$U(x, y) = \min(\alpha x, \beta y) \tag{4.16}$$

Si noti come l'utilità scaturisca dal consumo **congiunto** dei due beni x, y nella proporzione costante $\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta}$. In altri termini, l'incremento nel consumo di uno dei due beni, per quanto grande possa essere, non genera alcuna soddisfazione aggiuntiva se non è accompagnato da un incremento nel consumo dell'altro bene che tenda a riequilibrare la proporzione $\frac{\alpha}{\beta}$. A titolo di esempio si può verificare che, a parità di quantità del bene $x = \bar{x}$, un paniere che contenga una quantità infinitamente grande del bene y (per semplicità assumiamo $\alpha = \beta$) rende la stessa utilità di un paniere che contenga una quantità del bene y non inferiore a quella del bene x, ovvero $y' \geq \bar{x}$:

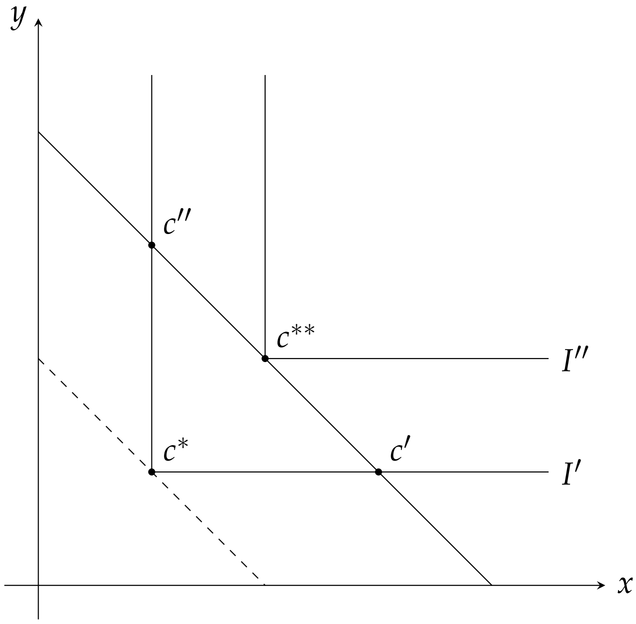
$$\lim_{y\to\infty} U(\bar{x}, y) = \lim_{y\to\infty} \min(\bar{x}, y) = \bar{x} = U(\bar{x}, y') \tag{4.17}$$

In conseguenza di questo, le curve di indifferenza si presentano nella forma:



Ottimalità

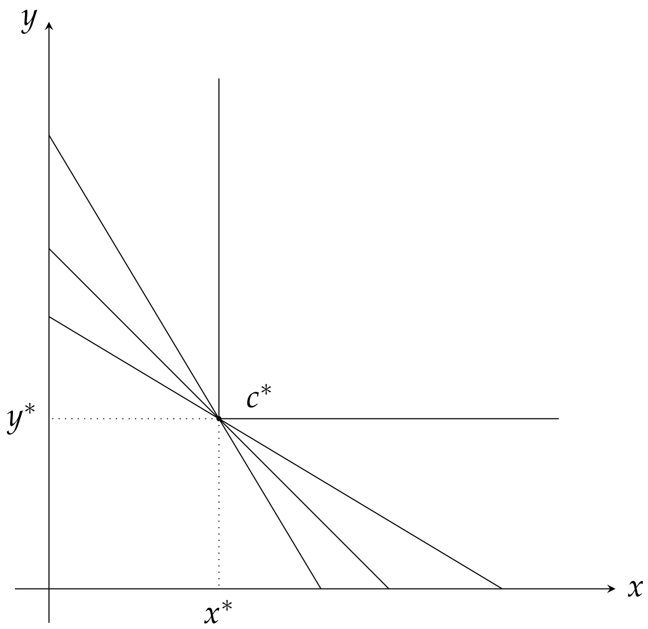
Si nota subito che nei punti angolosi la funzione di utilità ha derivata destra ($= 0$) diversa da quella sinistra ($\to \infty$) e dunque non possiamo convenientemente utilizzare la condizione di ottimalità vista finora, basata sul concetto di utilità marginale (derivata parziale della funzione di utilità). Ad ogni modo, se assumiamo che i prezzi siano strettamente positivi, $p_x > 0, p_y > 0$, la retta di bilancio sarà necessariamente monotona decrescente e, data la stretta convessità delle curve di indifferenza, potrà avere al più due punti di intersezione con ognuna di queste ultime; si veda in figura la retta di bilancio continua, corrispondente ad un reddito monetario M.



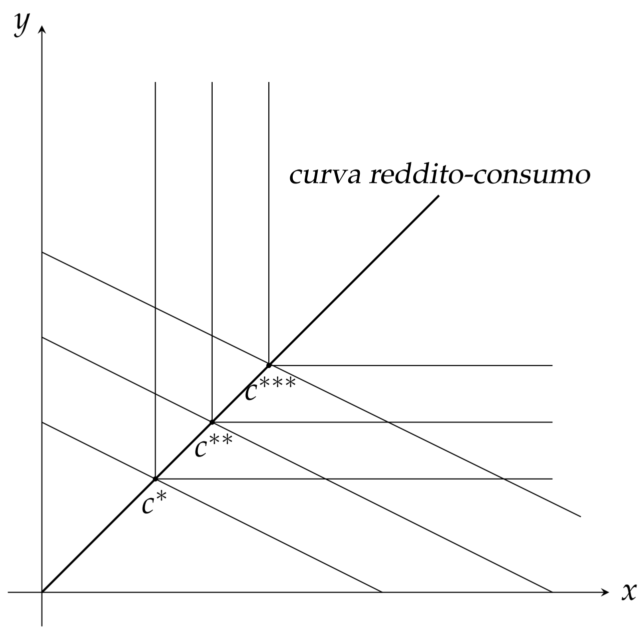
Panieri come c' e c'' non possono essere ottimi, in quanto esistono altri panieri che generano la stessa utilità per il consumatore e che hanno quantità di uno dei beni strettamente minori; per l'ipotesi di prezzi strettamente positivi, questi panieri saranno allora meno costosi rispetto a c' e a c'' e giaceranno su rette di bilancio più vicine all'origine. Più precisamente, un paniere come $c^* = (x^*, y^*)$ genera la stessa utilità generata da c' e c'' ed ha la minima quantità dei beni x e y compatibile con quel livello di utilità: c^* giace infatti sulla retta di bilancio tratteggiata, corrispondente a un livello di reddito $\underline{M} < M$. Formalmente valgono le relazioni

$$c^* \sim c' \sim c'' \quad \text{con} \quad p_x \cdot x^* + p_y \cdot y^* = \underline{M} < M \tag{4.18}$$

Poichè non esistono altri panieri a cui è associato lo stesso livello di utilità e che siano più convenienti di c^*, quest'ultimo sarà dunque un paniere ottimo.
Alternativamente, avremmo potuto vedere che sulla stessa retta di bilancio su cui giacciono c' e c'', giace anche un paniere, c^{**}, che è ottimo per un livello di utilità superiore (si noti che $I'' > I'$), in quanto non esistono sulla curva di indifferenza I'' altri panieri che giacciono su una retta di bilancio corrispondente ad un reddito minore di M.
Da questo ragionamento deriva che, nel caso di preferenze che vedano i beni come perfetti complementi, il paniere ottimo debba necessariamente essere quello in cui la curva di indifferenza presenta un punto angoloso. Si noti che, differentemente dai casi visti finora, la condizione di ottimalità è valida a prescindere da quali siano i prezzi dei beni: si veda infatti che qualunque sia il rapporto tra i prezzi dei beni $\frac{p_x}{p_y}$, l'unico paniere che soddisfi i criteri sopracitati rimane sempre e solo il punto di non derivabilità.

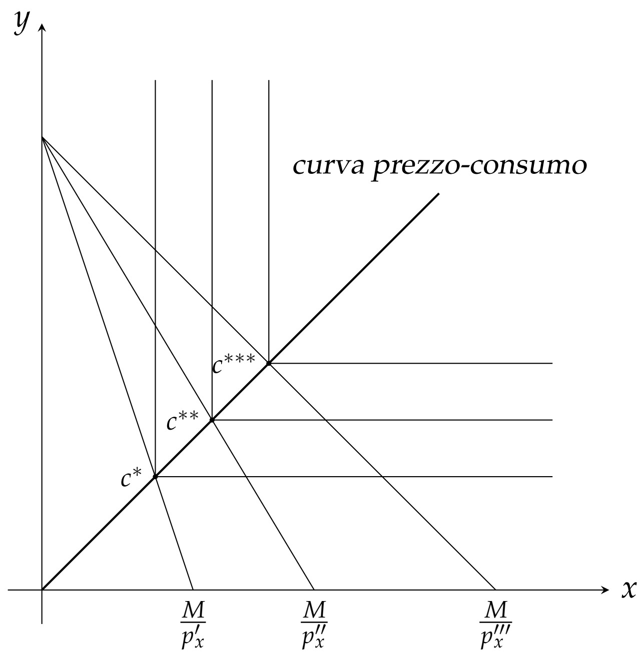


Curva reddito-consumo

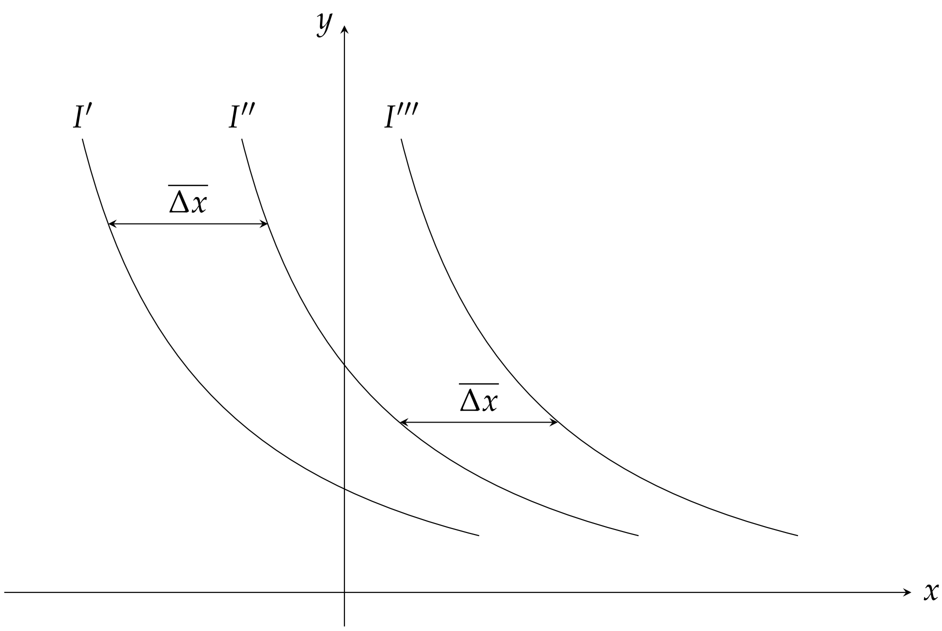


Domanda engeliana

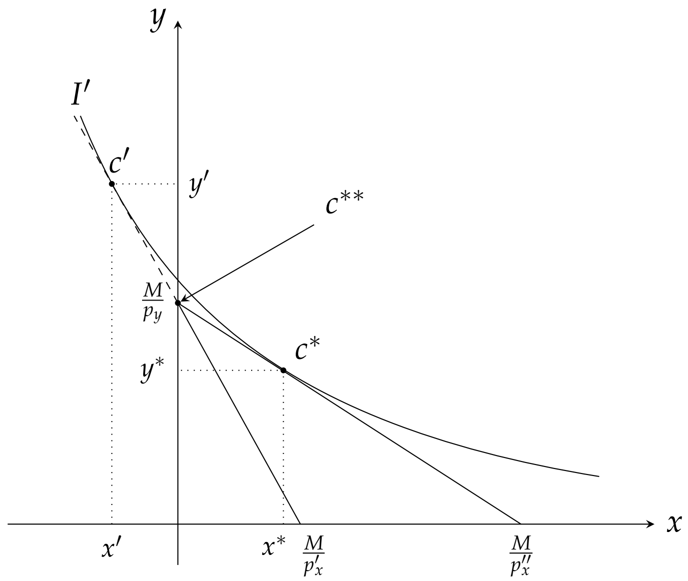
Curva prezzo-consumo



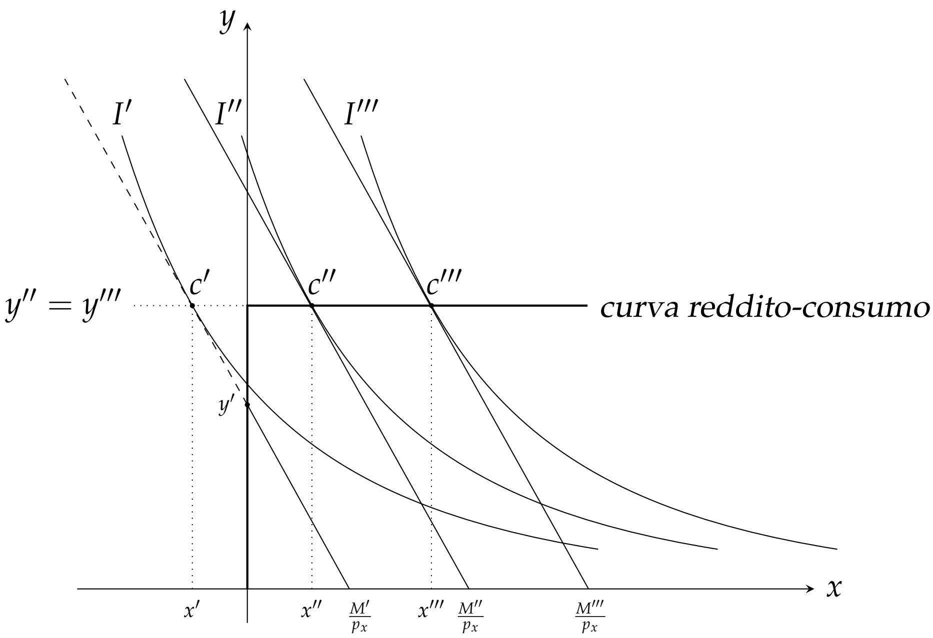
4.4 Preferenze Quasi-Lineari



Ottimalità



Curva Reddito-Consumo

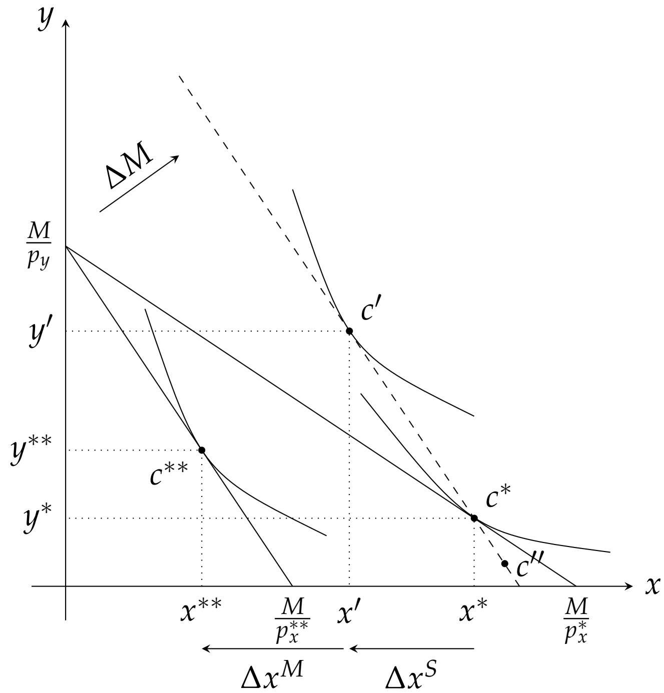


5 Equazione di Slutsky

Consideriamo la situazione in cui un consumatore, avendo un reddito pari a M e osservando sul mercato i prezzi p_x^*, p_y^*, domandi il paniere ottimo $c^* = (x^*, y^*)$. Adesso supponiamo che il prezzo del bene x vari da p_x^* a $p_x^{**} = p_x^* + \Delta p_x$ e che il prezzo del bene y, p_y rimanga costante; come già verificato, la variazione di p_x provoca la rotazione della retta di bilancio attorno all'intercetta verticale, dando luogo ad un nuovo paniere ottimo $c^{**} = (x^{**}, y^{**})$; la variazione nella domanda del bene x sarà quindi pari a $\Delta x = x^{**} - x^*$. L'equazione di Slutsky stabilisce come la variazione nella domanda ottima di un bene, nel nostro caso x, in seguito alla variazione del suo prezzo, p_x, sia il risultato di due effetti separati: l'*effetto sostituzione* e l'*effetto reddito*.

5.1 Effetto sostituzione

A titolo di esempio si consideri il caso di un aumento nel prezzo del bene, tale che $p_x^{**} > p_x^*$:



L'aumento di p_x provoca una riduzione nel potere di acquisto (ovvero nelle possibilità di consumo) del consumatore; si noti infatti come l'area compresa tra gli assi cartesiani e la retta di bilancio si riduca drasticamente dopo l'aumento di p_x, pur essendo rimasto il reddito monetario M costante. Si noti altresì che ai nuovi prezzi il consumatore non può più permettersi il paniere c^* che domandava prima dell'aumento. Infatti, per potersi permettere ai nuovi prezzi (p_x^{**}, p_y) il vecchio paniere ottimo c^*, dovrebbe disporre di un reddito pari a $M^{**} = p_x^{**} \cdot x^* + p_y \cdot y^* > M$. Supponiamo allora di sovvenzionare il consumatore con un certo ammontare di reddito ΔM in modo che, ai nuovi prezzi possa ancora permettersi il paniere domandato inizialmente c^*; si veda in figura la linea tratteggiata. Tale ammontare ΔM dovrà essere pari a:

$$\Delta M \equiv M^{**} - M = [p_x^{**} \cdot x^* + p_y \cdot y^*] - [p_x^* \cdot x^* + p_y \cdot y^*] = \Delta p_x \cdot x^* \qquad (5.1)$$

Tuttavia, anche se adesso il consumatore (che supponiamo avere preferenze regolari, come quelle mostrate in figura) dispone di un reddito M^{**} che gli permette di acquistare il vecchio paniere ottimo c^*, non domanderà più tale paniere, scegliendo piuttosto il paniere c'. Si noti che ai vecchi prezzi la condizione di ottimalità $SMS = \frac{p_x^*}{p_y}$ imponeva che nel punto c^* la retta di bilancio (che per definizione ha inclinazione pari al rapporto tra i prezzi) e una curva di indifferenza fossero tangenti (e avessero quindi la stessa pendenza); se le preferenze del consumatore non sono cambiate, non si potrà avere nello stesso punto una condizione di ottimalità per un altro rapporto tra i prezzi $\frac{p_x^*}{p_y} \neq \frac{p_x^{**}}{p_y}$, a meno di non violare l'ipotesi di transitività (due curve di indifferenza diverse si intersecherebbero). La domanda ottima x^* del bene x è dunque cambiata per il solo effetto della variazione dei prezzi relativi (rapporto dei prezzi); chiameremo questo fenomeno, **effetto sostituzione**, Δx^S:

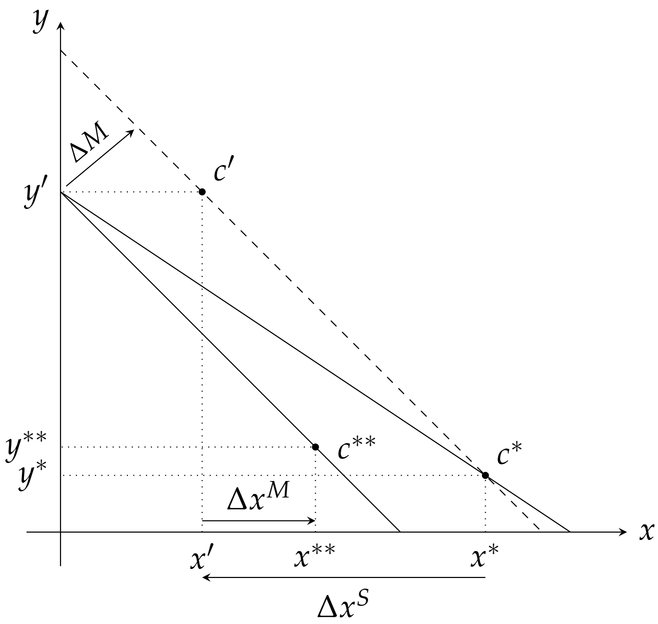
$$\Delta x^S = x' - x^* \tag{5.2}$$

Per capire il segno di questa variazione si consideri il paniere c'' sulla retta di bilancio tratteggiata che contiene una quantità del bene x maggiore di x^*; il consumatore non sceglierà mai questo paniere dopo l'aumento del prezzo p_x, poichè questo erano acquistabile anche ai vecchi prezzi e con il vecchio vincolo di bilancio, e in quella situazione il consumatore ha preferito acquistare il paniere c^*, manifestando la relazione $c^* \succ c''$; in altre parole non avrebbe ragione di comprare un paniere che ritenesse strettamente peggiore di un altro, continuando a poterseli permettere entrambi. Ne deriva che il consumatore che disponga di un reddito sovvenzionato in modo da mantenere costante il potere d'acquisto, finisca per domandare un paniere che, come c', contenga una quantità strettamente minore del bene x, e non minore del bene y (come precedentemente visto, la curva prezzo consumo per un consumatore con preferenze regolari è monotona decrescente). Il segno dell'effetto sostituzione, sotto le ipotesi che abbiamo imposto, avrà sempre segno negativo.

$$\Delta x^S < 0 \tag{5.3}$$

5.2 Effetto reddito

Supponiamo adesso di togliere al consumatore la sovvenzione di reddito ΔM precedentemente datagli, riportando il reddito monetario al suo valore originario M, e di analizzare l'evoluzione della domanda ottima per il bene x; si noti che in questo passaggio il rapporto dei prezzi rimane costante e pari a $\frac{p_x^{**}}{p_y}$. A seguito della diminuzione di reddito il consumatore domanderà un nuovo paniere ottimo, che conterrà quantità del bene x minori se questo è un bene *normale*, o maggiori se è un bene *inferiore*; nel nostro caso x è un bene normale, infatti $x^{**} < x'$. Il caso di un bene inferiore, *coeteris paribus* appare graficamente (per non appesantire la notazione, sono omesse le curve di indifferenza):



Questa variazione nella domanda del bene x, indotta solamente dalla variazione del reddito monetario viene detta **effetto reddito**, ed è calcolata residualmente come differenza tra il paniere acquistato ai nuovi prezzi con il reddito sovvenzionato per mantenere intatto il potere d'acquisto, e il paniere acquistato ai nuovi prezzi con il reddito monetario originario:

$$\Delta x^M = x^{**} - x' \tag{5.4}$$

Come appena visto, il segno dell'effetto reddito dipende dall'elasticità della domanda rispetto al reddito:

- se $\eta_{x,M} > 0$, x è un bene normale e $\Delta x^M > 0$;
- se $\eta_{x,M} < 0$, x è un bene inferiore e $\Delta x^M < 0$.

5.3 Scomposizione della variazione complessiva

La variazione complessiva della domanda del bene x dopo un aumento del suo prezzo è dunque uguale a:

$$\Delta x = x^{**} - x^* = (x^{**} - x') + (x' - x^*) = \Delta x^S + \Delta x^M \tag{5.5}$$

Se definiamo $\Delta x^R = -\Delta x^M$, l'equazione diventa:

$$\Delta x = \Delta x^S - \Delta x^R \tag{5.6}$$

L'equazione, che afferma che la variazione complessiva della domanda sia la somma tra le variazioni dovute all'effetto reddito e l'effetto sostituzione, acquisisce un maggior significato se posta in termini di saggi di variazione, ovvero dividendo la variazione nella domanda ottima per la variazione di prezzo che l'ha causata:

$$\frac{\Delta x}{\Delta p_x} = \frac{\Delta x^S}{\Delta p_x} + \frac{\Delta x^R}{\Delta p_x} \tag{5.7}$$

Il termine $\frac{\Delta x^S}{\Delta p_x}$ misura il saggio di variazione della domanda del bene x imputabile alla sola variazione del prezzo p_x (a parità di potere d'acquisto). Il secondo termine è invece di dubbio significato economico, misurando l'effetto reddito in termini di una variazione di prezzo; per ovviare a questo inconveniente moltiplichiamo e dividiamo il secondo membro per ΔM, ricordando che $\frac{\Delta M}{\Delta p_x} = x^*$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta p_x} = \frac{\Delta x^S}{\Delta p_x} + \frac{\Delta x^R}{\Delta M} \cdot \frac{\Delta M}{\Delta p_x} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\Delta x}{\Delta p_x} = \frac{\Delta x^S}{\Delta p_x} + \frac{\Delta x^R}{\Delta M} \cdot x^* \tag{5.8}$$

Quest'ultima è la formulazione esatta dell'equazione di Slutsky. Il termine $\frac{\Delta x^R}{\Delta M}$ misura il saggio di variazione della domanda imputabile alla sola variazione nel reddito monetario dovuta alla compensazione ΔM, a prezzi costanti $\frac{p_x^{**}}{p_y}$.

6 Dotazioni

Si supponga di trovarsi in un'economia con due soli beni x, y, e che il consumatore disponga di un diritto di proprietà su un certo paniere dei due beni, anzichè avere un reddito monetario dato. In questo caso il reddito (reale) varia al variare dei prezzi di mercato p_x e p_y. Si definisce la dotazione iniziale del consumatore con il vettore di quantità $\omega = (\omega_x, \omega_y) \geq 0$, che può essere rappresentato nel consueto spazio delle possibilità di consumo.
Il reddito del consumatore nel caso di dotazioni diventa:

$$M = p_x \cdot \omega_x + p_y \cdot \omega_y \tag{6.1}$$

Il vincolo di bilancio rimane:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq M \tag{6.2}$$

che vale con stretta uguaglianza nel caso di preferenze *regolari* (il consumatore spende tutto il reddito a sua disposizione). Eguagliando la (6.2) alla (6.1) otteniamo:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = p_x \cdot \omega_x + p_y \cdot \omega_y \tag{6.3}$$

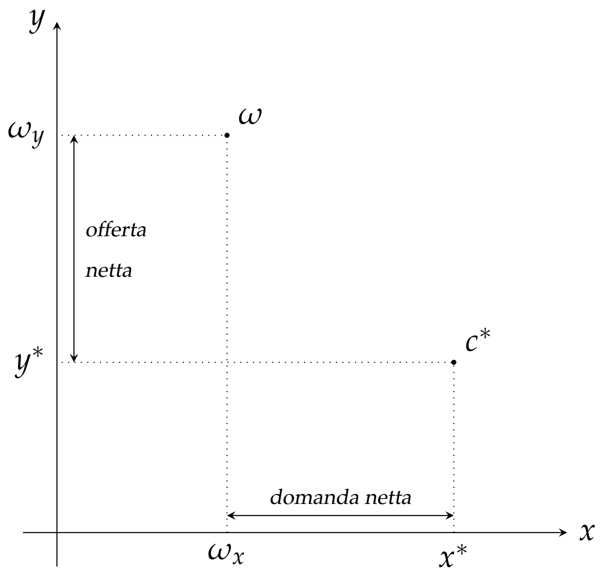
in cui si legge che il valore dei beni consumati debba eguagliare il valore delle dotazioni iniziali. Raccogliendo a fattor comune:

$$p_x(x - \omega_x) + p_y(y - \omega_y) = 0 \tag{6.4}$$

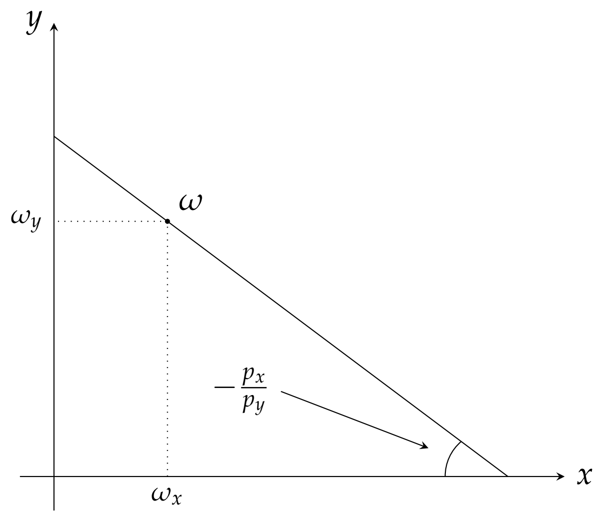
dove $(x - \omega_x)$ rappresenta la *domanda netta* del bene x e $(y - \omega_y)$ quella del bene y. La domanda netta è definita come la differenza tra l'ammontare del bene posseduto inizialmente (dotazione) e l'ammontare del bene consumato (scelta ottima). La domanda netta può essere sia positiva che negativa (nel qual caso si parla anche di *offerta netta*). Poichè abbiamo supposto di trovarci in un'economia di soli 2 beni, nel caso in cui la domanda netta per uno dei beni sia positiva, necessariamente il consumatore dovrà essere un offerente netto dell'altro bene affinchè la (6.4) sia rispettata. A titolo di esempio:

$$\text{se } (x - \omega_x) \geq 0 \text{ allora } (y - \omega_y) \leq 0 \tag{6.5}$$

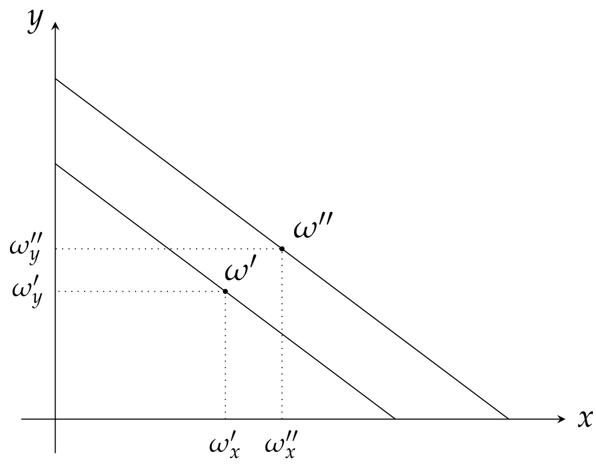
Graficamente:



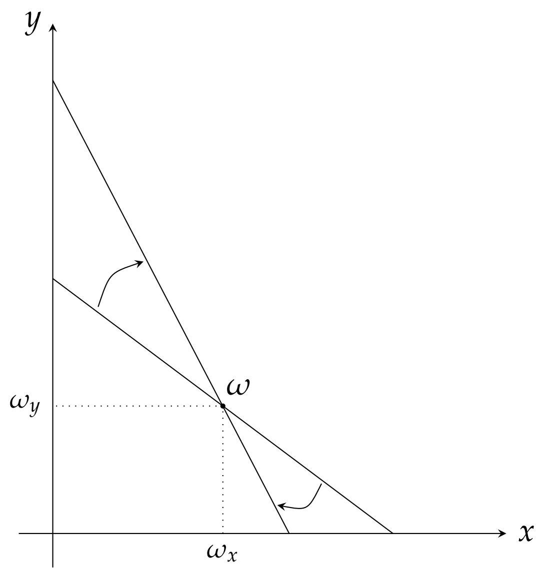
Per rappresentare graficamente il vincolo è sufficiente conoscerne la pendenza e individuare un punto che gli appartenga. La pendenza è data dal saggio al quale si possono scambiare i beni sul mercato, ovvero il rapporto tra i prezzi di mercato (cambiato di segno) $-\frac{p_x}{p_y}$; inoltre, poichè il vincolo di bilancio è il luogo geometrico delle possibilità di consumo che il consumatore si può permettere ai prezzi correnti, dato il valore delle sue dotazioni iniziali, esso dovrà necessariamente passare per il paniere di dotazione ω.



Una variazione nelle dotazioni da ω' a $\omega'' > \omega'$ comporta una traslazione del vincolo verso l'esterno, permettendo il consumo di quantità maggiori di entrambi i beni.



Una variazione nei prezzi dei beni che lasci inalterato il loro rapporto, del tipo $\frac{p'_x}{p'_y} = \frac{\lambda p_x}{\lambda p_y}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ lascia invariato il vincolo di bilancio: viene preservata la proprietà di assenza di illusione monetaria.
La variazione di uno solo dei due prezzi, (o più genericamente una variazione di entrambi che non lascia inalterato il loro rapporto) incide sulla pendenza del vincolo che ruoterà attorno al paniere delle dotazioni iniziali ω dal quale deve necessariamente continuare a passare.
A titolo di esempio, supponiamo che il prezzo del bene x aumenti, cosicchè $p''_x > p'_x$ e che il prezzo del bene y rimanga costante:



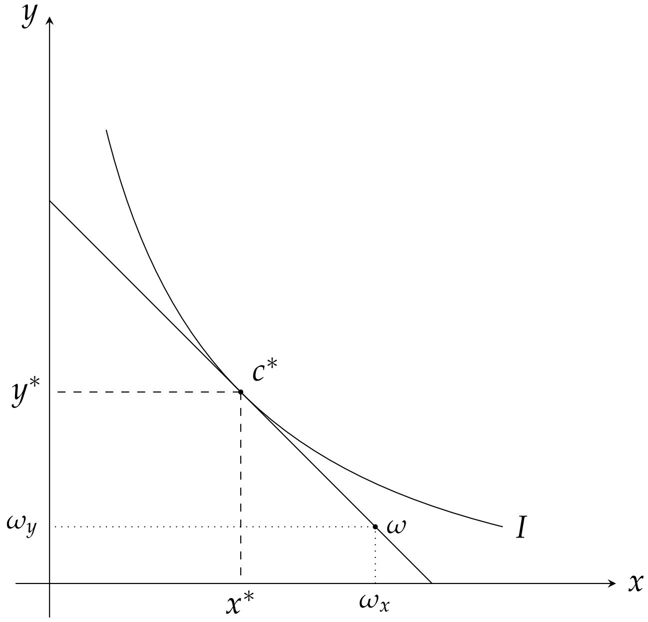
si noti che si otterrebbe lo stesso risultato facendo diminuire il prezzo del bene y lasciando il prezzo del bene x invariato, purchè si giunga allo stesso nuovo rapporto tra i prezzi.

6.1 Scelta ottima

La derivazione della scelta ottima non differisce sostanzialmente da quella nel caso di reddito monetario dato. Date delle preferenze regolari il paniere ottimo sarà individuato dal punto di tangenza tra la curva di indifferenza più alta, compatibile con la retta di bilancio, in cui il saggio marginale di sostituzione è uguale al rapporto tra i prezzi:

$$SMS = \frac{p_x}{p_y} \tag{6.6}$$

Graficamente:



Si noti che non è escluso il caso in cui il paniere ottimo coincida con le dotazioni iniziali, $c^* = \omega$; questo si verifica nel caso in cui il punto di tangenza tra la curva di indifferenza I e il vincolo di bilancio sia proprio ω.